Curs VIII
Modelarea scurgerii în bazine hidrografice

Modelarea scurgerii lichide în albiile cursurilor de apă

1. Modele unidimensionale

Curgerea unidimensională în cursuri de apă naturale e descrisă de ecuaţiile Saint – Venant:

- ecuaţia de continuitate:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{A}{B}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{q_l}{B}=0$$

- ecuaţia conservării momentului:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g\cdot(S_f-S_0)=0$$

unde: h – adâncimea apei; A – aria secţiunii transversale; B – lăţimea oglinzii apei; v – viteza medie a apei; t – timpul; x – direcţia de curgere; g – acceleraţia gravitaţională; S_f – panta liniei energetice; S_0 – panta talvegului; q_l – debitul din lateral.

Aceste ecuaţii se bazează pe următoarele ipoteze simplificatoare:
- curgere unidimensională, cu viteza uniformă în secţiune transversală şi suprafaţă liberă orizontală în direcţie transversală;
- curbura liniilor de curent redusă şi acceleraţiile după verticală neglijabile, astfel încât distribuţia de presiune în secţiune transversală este hidrostatică;
- efectele turbulenţei şi frecărilor la patul albiei sunt descrise de relaţii identice cu cele din mişcarea permanentă;
- panta medie a talvegului în lungul curgerii este suficient de redusă, astfel încât $\sin\alpha \cong tg\alpha = I$ (panta);
- forma geometrică a secţiunii transversale se admite arbitrară şi variabilă în lungul albiei, dar cu variaţii lente care să nu afecteze puternic curbura liniilor de curent.

Un alt set de ecuaţii care descriu mişcarea unidimensională sunt ecuaţiile lui Boussinesq, care se bazează pe aceleaşi ipoteze simplificatoare ca şi ecuaţiile Saint – Venant, cu deosebirea că ele consideră că distribuţia presiunii în secţiune transversală nu este hidrostatică. Ecuaţiile sunt:

- ecuaţia de continuitate:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (vh)}{\partial x}=0$$

- ecuaţia conservării momentului:

$$\frac{\partial (hv)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hv^2+\frac{1}{2}gh^2)-\frac{1}{3}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial t}=0$$

semnificaţiile notaţiilor sunt aceleaşi ca la ecuaţiile Saint – Venant.

2. *Modele bidimensionale*

Un model este cel bazat pe ecuaţia lui Reynolds, adică ecuaţia de mişcare mediată în timp pentru curgere turbulentă:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = X_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\overline{u'_i u'_j})$$

unde: u – viteza apei, $u=(u_i)_{i=1,2}$; X – forţa volumică; p – presiunea; $x=(x_i)_{i=1,2}$; τ - efortul tangenţial dat de vâscozitatea fluidului; $-\overline{u'_i u'_j}$ - efortul tangenţial dat de turbulenţă (Reynolds).

În cazul curgerii turbulente uniforme, când vâscozitatea este neglijabilă, obţinem ecuaţia:

$$\rho g J + \frac{d}{dy}(-\rho\overline{u'v'}) = 0$$

unde: J – panta liniei energetice; ρ - densitatea apei.

Un alt model se poate deduce folosind ecuaţia de continuitate şi ecuaţia Navier – Stokes pentru un fluid incompresibil, prin integrarea lor în raport cu adâncimea apei .

- ecuaţia de continuitate:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Ecuaţia Navier - Stokes scrisă detaliat:

- ecuaţia conservării momentului:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\nabla p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\nabla p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\nabla p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2 w$$

unde: u, v, w – componentele vitezei apei pe cele trei direcţii x, y, z; g_x, g_y, g_z – componentele forţei gravitaţionale; μ – vâscozitatea dinamică; p – presiunea; ∇^2 – operatorul lui Laplace.

Prin integrare în raport cu adâncimea apei se obţine următoarea ecuaţie matriceală:

$$\mathbf{V_t + P_x + R_y + T = 0}$$

unde:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} uh \\ \frac{1}{2}u^2 + gh \\ uv \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} vh \\ uv \\ \frac{1}{2}v^2 + gh \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(S_{ox} - S_{fx}) \\ -g(S_{oy} - S_{fy}) \end{pmatrix}$$

S_{ox}, S_{oy} – panta fundului albiei pe direcţiile x, y; S_{fx}, S_{fy} – panta liniei energetice pe direcţiile x,y.

Domenii de aplicabilitate:

- se aplică pentru studiul mişcării apei în canale cu nivel liber în situaţiile în care modelul unidimensional nu este potrivit: în canale neprismatice, la studiul undelor de viitură produse la accidentele de la construcţiile hidrotehnice sau la ruperea digurilor de protecţie împotriva inundaţiilor.

3. Modele tridimensionale

Un model tridimensional este cel bazat pe ecuaţia Navier-Stokes şi ecuaţia de continuitate (forme vectoriale):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{\nabla p}{\rho} - \varepsilon_f \nabla^2 \vec{u} - \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

unde: u – viteza apei, $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$; p – presiunea hidrostatică; ε_f – vâscozitatea (eddy viscosity); ρ - densitatea apei; $\vec{B}$ - forţa Coriolis.

Domenii de aplicabilitate:

- modelul este util în studiul eroziunilor şi sedimentărilor locale în albii, în apropiere de structuri hidrotehnice, poduri etc.; datorită formei destul de complicate, nu este recomandat pentru studiul curgerii lichide în sisteme hidraulice complexe.

4. O altă posibilitate de studiu a scurgerii lichide în bazine hidrografice (versanţi şi albii)

- presupune următoarele:

- calculul timpului de concentrare a scurgerii pe versant:

$$t_v = \frac{L_v}{v_v}$$

unde: L_v – lungimea versantului; v_v – viteza cu care se deplasează scurgerea superficială

$$v_v = C \cdot I^m h^n \quad \text{sau} \quad v_v = k_v \cdot L_v^{1/2} I^{1/4}$$

C – coeficient; m, n – exponenţi daţi în tabele; I – panta versantului; h – adâncimea medie a apei; k_v – coeficient în funcţie de acoperirea terenului cu vegetaţie.

- calculul timpului de concentrare a scurgerii în albie:

$$t_a = \frac{L_a}{va}$$

unde: L_a – lungimea văii; v_a – viteza apei

$$v_a = C\sqrt{RI_a} \quad \text{(Chezy)} \quad \text{sau} \quad v_a = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{h}}} \sqrt{hI_a} \quad \text{(Bazin)}$$

C – coeficientul lui Chezy; R – raza hidraulică; I_a – panta albiei; γ – rugozitatea după Bazin; h – adâncimea medie de apă.

- determinarea debitului de calcul pe bazine mici:

$$Q = k \cdot S \cdot i$$

unde: k – coeficient de scurgere; S – suprafaţa luată în calcul; i – intensitatea precipitaţiilor.

- determinarea volumului scurgerii pe bazine hidrografice mari – se bazează pe teoria bilanţului scurgerii

$$V_{total} = V_{\text{scurgerii pe versant la un moment dat}} + V_{\text{acumulat în reţeaua de albii la acelaşi moment}} + V_{\text{scurs prin secţiunea de ieşire la acelaşi moment}}$$

$$V_v = \begin{cases} 710 h_0 S & daca \quad t > t_c \\ 710 h_1 S & daca \quad t < t_c \end{cases}$$

unde: $h_0 = i_s t_c$, înălţimea stratului de apă la baza versantului, în cazul în cate timpul de concentrare t_c este mai mic decât intervalul de timp de la începerea scurgerii până la sfârşitul ploii t; i_s – intensitatea scurgerii de suprafaţă; $h_1 = i_s t$; i_s = intensitatea ploii – intensitatea infiltraţiei.

$$V_a = \frac{1000}{3} \omega L \left(\frac{L + \sum l}{L} \right)^{1/6}$$

unde: ω – aria secţiunii transversale de ieşire a canalului principal; L – lungimea canalului principal; ∑l – lungimea canalelor secundare.

$$V_i = 60 \sum t_n Q_n$$

în care: t_n – intervalul de timp în care debitul Q_n se menţine constant.

Domenii de aplicabilitate:

- relaţiile se pot aplica pentru bazine hidrografice mici, cu formaţiuni ale eroziunii în adâncime.